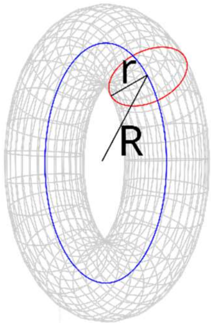
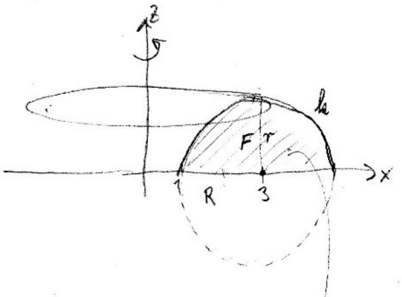
Torusvolumen via Integration



Torus-Hälfte

Volumen via GULDIN



$R = 3$

$r = 2$

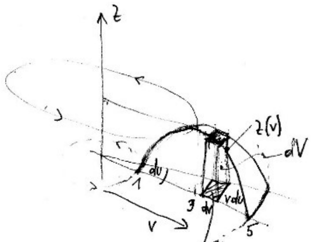
GULDIN
Querschnittfläche · Schwerpunktweg

$V = F \cdot 2R\pi = \frac{r^2\pi}{2} \cdot 2R\pi = Rr^2\pi^2$

$V = 3 \cdot 2^2\pi^2 = \underline{12\pi^2}$

Volumen via Integration über Zylinderkoordinaten

$V_{TORUS} = 2Rr^2\pi$!



$k: (x-R)^2 + z^2 = r^2$

$z = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$

½ Torus

$$\boxed{V = \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=1\,(=R-r)}^{5\,(=R+r)} \sqrt{r^2 - (v-R)^2} \cdot v \cdot dv \right) du = \ldots = Rr^2\pi^2}$$

$$= \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=1}^{5} \sqrt{4 - (v-3)^2} \cdot v \cdot dv \right) du = \ldots = \underline{12\pi^2}$$

$dA = dv \cdot v\,du$

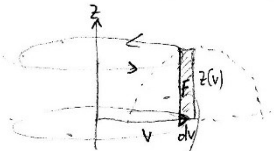
$dV = dA \cdot z(v) = (dv \cdot v\,du) \cdot z(v)$

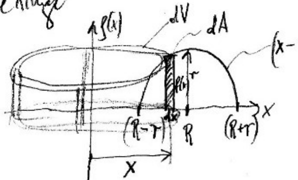
$V = \iint dV$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_{R-r}^{R+r} z(v) \cdot v\,dv \right) du$$

$\downarrow$ „GULDIN"

bzw. infinitesimale Ringe





$(x-R)^2 + y^2 = r^2$

$\Rightarrow y = f(x) = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$

$dV = F = z(v)\,dv \cdot 2\pi \cdot v$

„Querschnittfläche" · „Schwerpunktweg"

$dV = 2\pi x \cdot dA = 2\pi x \cdot dx \cdot f(x)$

$dV = 2\pi x\,dx \cdot \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$

$$\boxed{V = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} \sqrt{r^2 - (x-R)^2} \cdot x \cdot dx}$$

Integral via mathdf.com

Da mathdf.com keine Doppelintegrale berechnen kann, wird in zwei Schritten gerechnet.

Da mathdf.com nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterscheiden kann, wird der Radius des kreisförmigen Torus-Röhrenquerschnitts) r mit r_k, der Torus-Radius R (Abstand vom Torus-Mittelpunkt zum Kreismittelpunkt) mit r_t angegeben.

$$V = \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=R-r}^{R+r} \sqrt{r^2 - (v-R)^2} \cdot v \cdot dv \right) du = \ldots = R r^2 \pi^2$$

Berechnet wird ein Toroid mit Halbkreisquerschnitt.
Die Multiplikation mit 2 ergibt das Torusvolumen!

Schritt 1:
sqrt(r_k^2-(v-r_t)^2)v
solution link: https://mathdf.com/int/#expr=sqrt(r_k%5E2-(v-r_t)%5E2)v&arg=v&b=r_t-r_k&t=r_t%2Br_k

$$\int_{r_t - r_k}^{r_t + r_k} \sqrt{r_k^2 - (v - r_t)^2}\, v \, \mathrm{d}\, v = \frac{\pi\, {r_k}^2\, r_t}{2}$$

Schritt 2:
(pi*r_k^2*r_t)/2
solution link: https://mathdf.com/int/#expr=(pi*r_k%5E2*r_t)%2F2&arg=u&b=0&t=2pi

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\pi\, r_k^2\, r_t}{2}\, \mathrm{d}\, u = \pi^2\, {r_k}^2\, r_t$$