

## Einheitsklothoide

**Herleitung** der für die sog. Einheitsklothoide geltenden Beziehung  $\rho \cdot s = 1$

bzw.  $\rho \cdot s = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{s}$  und  $\kappa = \frac{1}{\rho} = s$

$s$  ... Länge aller Windungen vom Ursprung bis zum gewählten Punkt auf der Kurve,  
 $\rho$  ... Krümmungsradius,  $\kappa$  ... Krümmung (am gewählten Punkt der Kurve)

Ernesto Cesàro 1886, spricht von der „natürlichen Gleichung“ einer Kurve, wenn die Krümmungsfunktion bzw. die Krümmungsradiusfunktion in Abhängigkeit von der Bogenlänge angegeben wird.

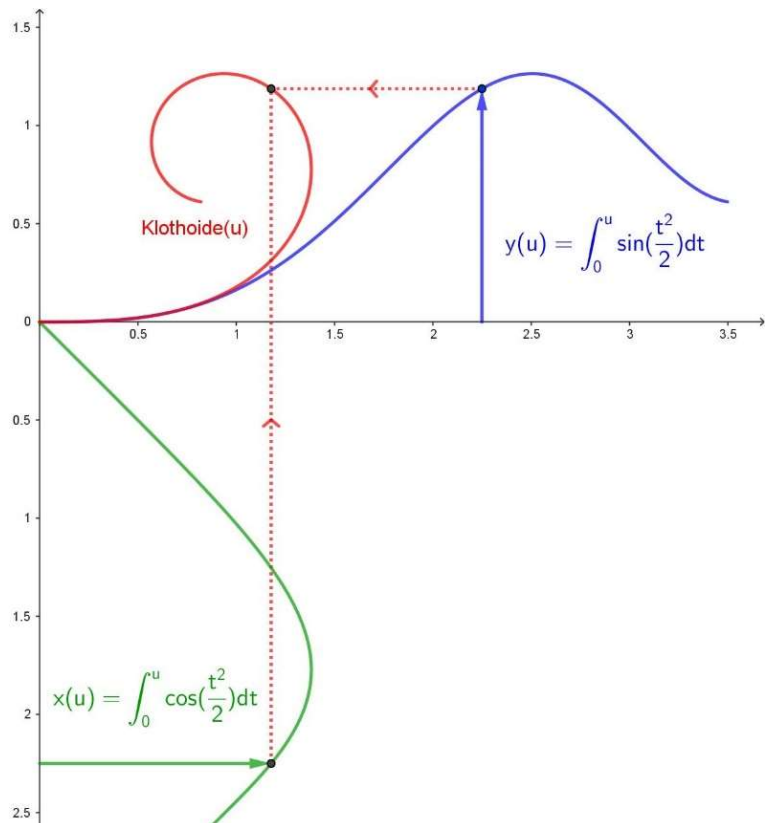
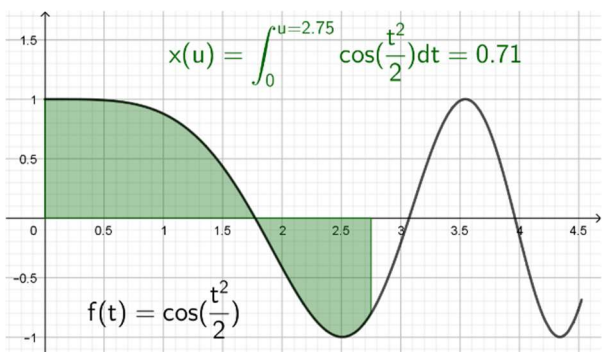
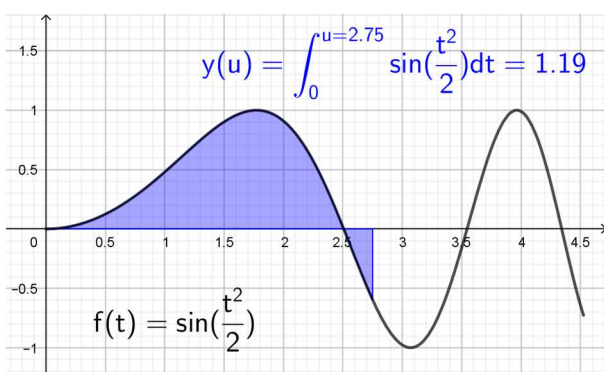
Für die Einheitsklothoide gilt  $\rho \cdot s = 1$ . Verallgemeinert:  $\rho \cdot s = A^2, A^2$ ... Klothoidenparameter

### Vorbemerkungen:

Die Krümmung  $\kappa = \frac{1}{\rho}$  ( $\rho$ ... Krümmungsradius) ist an jeder Stelle der Klothoide direkt proportional zur Länge des Bogens  $s$  vom Ursprung (= Symmetriepunkt, Wendepunkt) bis genau zu der in Betrachtung stehenden Stelle:  $\kappa = \frac{1}{\rho} \sim s$ . Ist der Proportionalitätsfaktor = 1, so gilt  $\kappa = \frac{1}{\rho} = s$  bzw.  $\rho = \frac{1}{s}$  oder  $\rho \cdot s = 1$ . In diesem Fall spricht man von der Einheitsklothoide. Alle (anderen) Klothoiden sind zueinander geometrisch ähnlich. D. h., sie haben gleiche Form aber unterschiedliche Größe. Durch Skalieren (Strecken bzw. Stauchen) der Einheitsklothoide kann man jede beliebige andere (mehr oder minder „flache“) Klothoide erhalten. Näheres diesbezüglich s. u.!

Die Darstellung einer Klothoide – hier der Einheitsklothoide – erhält man wie folgt:

Es seien  $x(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt$  und  $y(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt$  die (nur numerisch integrierbaren) sog. Fresnelintegrale. Eine Parameterdarstellung  $(x(u), y(u))$  dieser Integralwerte in einem rechtwinkligen, zweidimensionalen Koordinatensystem ( $x(u)$  auf der x-Achse und  $y(u)$  auf der y-Achse) ergibt eine Spirale, die Klothoide.



# Einheitsklothoids

Herleitung der Bogenlänge- und der Krümmungsfunktion

$$x(u) = \int_{t=0}^{t=u} \cos(t^2/2) dt$$

$$y(u) = \int_{t=0}^{t=u} \sin(t^2/2) dt$$

$$\dot{x}(t) = \cos(t^2/2) \quad \ddot{x}(t) = -\sin(t^2/2) \cdot t = -\sin(t^2/2) \cdot t$$

$$\dot{y}(t) = \sin(t^2/2) \quad \ddot{y}(t) = \cos(t^2/2) \cdot t = \cos(t^2/2) \cdot t$$

Bogenlänge:  $s(u) = \int_{t=0}^{t=u} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$

$$\begin{aligned} s(u) &= \int_{t=0}^{t=u} \sqrt{\cos^2(t^2/2) + \sin^2(t^2/2)} dt = \int_{t=0}^{t=u} 1 dt = \left. t \right|_{t=0}^{t=u} = u \\ &= \int_{t=0}^{t=0} \dots = 0 \end{aligned}$$

Krümmung:  $\kappa(t=u) = \frac{\dot{x}(u) \cdot \ddot{y}(u) - \ddot{x}(u) \cdot \dot{y}(u)}{(\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2)^{3/2}}$

$\rho = \frac{1}{\kappa}$  s... Krümmungsradius

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\kappa(u)}} &= \frac{\cos(u^2/2) \cdot \cos(u^2/2) \cdot u + \sin(u^2/2) \cdot \sin(u^2/2) \cdot u}{(\cos^2(u^2/2) + \sin^2(u^2/2))^{3/2}} = \\ &= \frac{\underbrace{1}_{\cos^2(u^2/2) + \sin^2(u^2/2)} \cdot u}{1} = \underline{\underline{u}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} s &= u \\ \kappa &= \frac{1}{\rho} = u \end{aligned} \right\} \kappa = \frac{1}{\rho} = s \text{ bzw. } \underline{\underline{\rho \cdot s = 1}}$$

Einheitsklothoids

# Klothoide und ihre Skalierung

$$x(u) = c_1 \int_{t=\phi}^{t=0} \cos(c_2 t^2) dt$$

$c_1, c_2 \dots$  Konstanten, Konstruktionsparameter

$$y(u) = c_1 \int_{t=\phi}^{t=0} \sin(c_2 t^2) dt$$

$$\dot{x}(t) = c_1 \cdot \cos(c_2 t^2) \quad \ddot{x}(t) = c_1 \cdot (-\sin(c_2 t^2)) \cdot 2t \cdot c_2 = c_1 \cdot c_2 \cdot 2t \cdot (-\sin(c_2 t^2))$$

$$\dot{y}(t) = c_1 \cdot \sin(c_2 t^2) \quad \ddot{y}(t) = c_1 \cdot \cos(c_2 t^2) \cdot 2t \cdot c_2 = c_1 \cdot c_2 \cdot 2t \cdot \cos(c_2 t^2)$$

Bogenlänge:  $s(u) = \int_{t=\phi}^{t=0} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$

$$s(u) = \int_{t=\phi}^{t=0} \sqrt{c_1^2 \cos^2(c_2 t^2) + c_1^2 \sin^2(c_2 t^2)} dt = \int_{t=\phi}^{t=0} c_1 dt = c_1 \left. \frac{dt}{1} \right|_{t=0}^{t=0} = \underline{\underline{c_1 \cdot u}}$$

Krümmung  $\kappa(t=0) = \frac{\dot{x}(u) \cdot \ddot{y}(u) - \ddot{x}(u) \cdot \dot{y}(u)}{(\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2)^{3/2}} \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$  p... Krümmungsradius

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\kappa(u)}} &= \frac{c_1 \cos(c_2 u^2) \cdot c_1 c_2 2u \cos(c_2 u^2) - c_1 c_2 2u (-\sin(c_2 u^2)) \cdot c_1 \sin(c_2 u^2)}{(c_1^2 \cos^2(c_2 u^2) + c_1^2 \sin^2(c_2 u^2))^{3/2}} = \\ &= \frac{c_1^2 c_2 \cdot 2u (\cos^2(c_2 u^2) + \sin^2(c_2 u^2))}{c_1^3} = \underline{\underline{\frac{c_2}{c_1} \cdot 2u}} \end{aligned}$$

$$s = c_1 \cdot u \quad u = s/c_1$$

$$\kappa = \frac{c_2}{c_1} \cdot 2u = \frac{c_2}{c_1} \cdot 2 \cdot \frac{s}{c_1} = \frac{c_2}{c_1^2} \cdot 2s$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad \rho = \frac{c_1^2}{c_2 \cdot 2s}$$

$$\boxed{\rho \cdot \kappa = \frac{c_1^2}{2c_2}}$$

Einheitsklothoide:

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1/2$$

$$\rho \cdot \kappa = \frac{1}{2 \cdot 1/2} = 1 \quad \checkmark$$

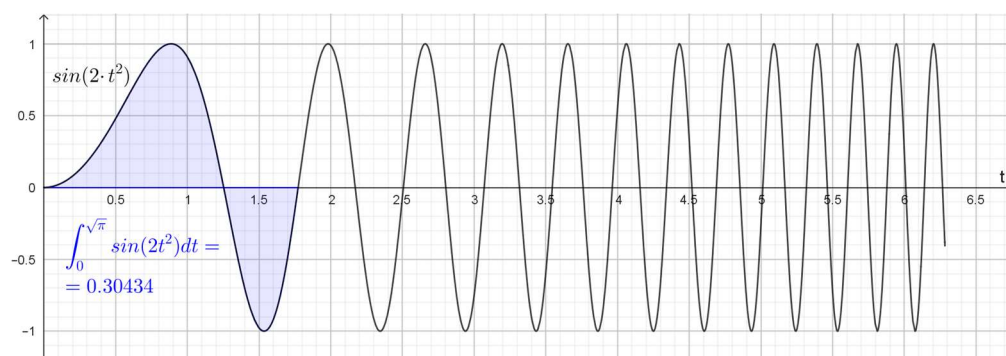
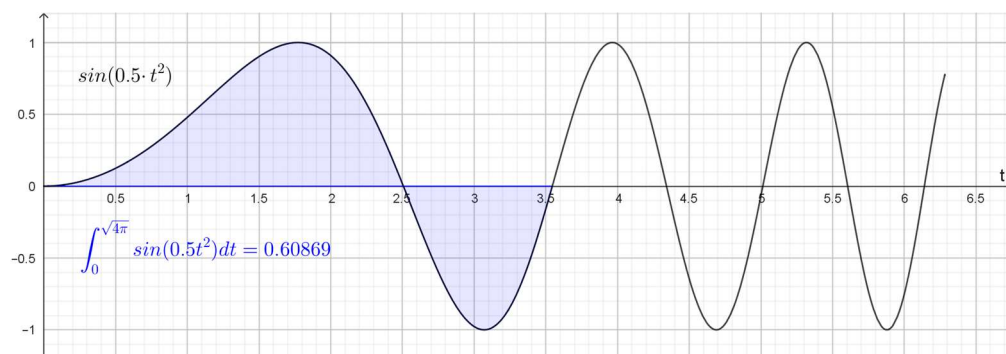
## Über die Bedeutung der Skalierungsfaktoren $c_1$ und $c_2$

Der Skalierungsfaktor  $c_1$  bewirkt eine zentrische Streckung mit dem Koordinatenursprung als Streckungszentrum.

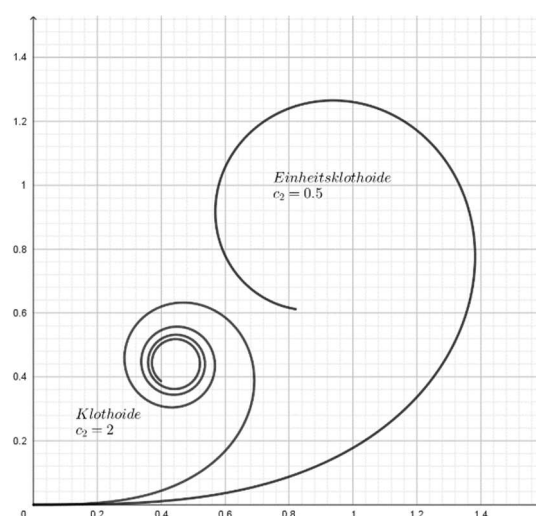
Die (ebenfalls zentrisch streckende) Wirkung des Skalierungsfaktors  $c_2$  in einem Fresnelintegral  $\int \cos(c_2 t^2) dt$  bzw.  $\int \sin(c_2 t^2) dt$  und im Weiteren für die Klothoide erklärt sich wie folgt:

Je größer der Faktor  $c_2$  ist, umso größer ist bereits die „Start“-Frequenz“ der Winkelfunktion. Die Frequenz selbst nimmt, wie in den Abbildungen zu erkennen ist, mit wachsendem Parameter  $t$  zu.

Bei größerer Start-Frequenz wird aber der Integralwert kleiner, was in der Abbildung –  $\sin(0.5t^2)$  vs.  $\sin(2t^2)$  – jeweils für die erste Schwingung demonstriert ist.



Für die Klothoide bedeuten kleinere Integralwerte eine „steilere“ Form. Betreffend den Konvergenzpunkt der Spirale bedeutet das: je größer der konstante Faktor im Winkelfunktionsargument ist, umso kleinere Koordinatenwerte hat der Konvergenzpunkt. Der Konvergenzpunkt „wandert“ entlang der ersten Mediane.



Für den Grenzwert des Fresnelintegrals und somit für Konvergenzpunkt der Klothoide gilt (nach Dirichlet):

$$x(u) = \int_{t=0}^{t=u=\infty} \cos(c_2 t^2) dt = y(u) = \int_{t=0}^{t=u=\infty} \sin(c_2 t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8 \cdot c_2}}$$