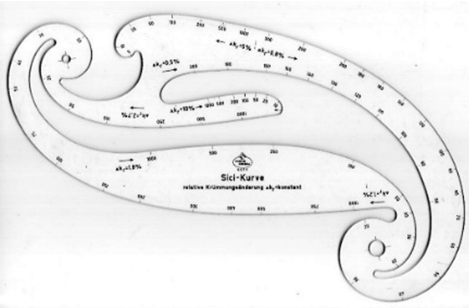
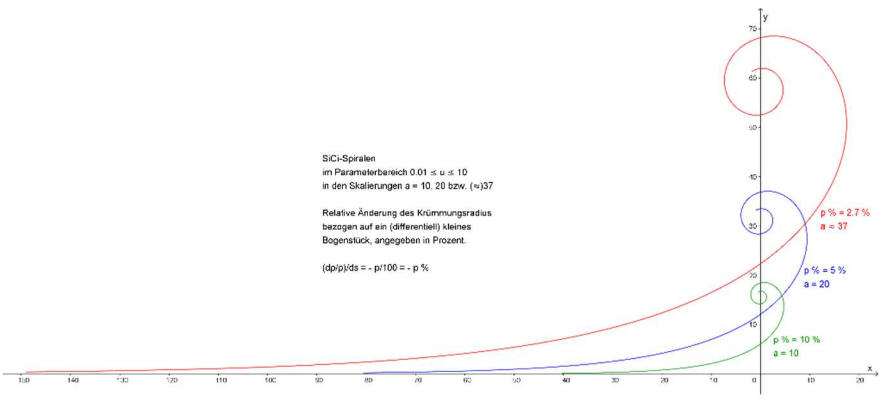
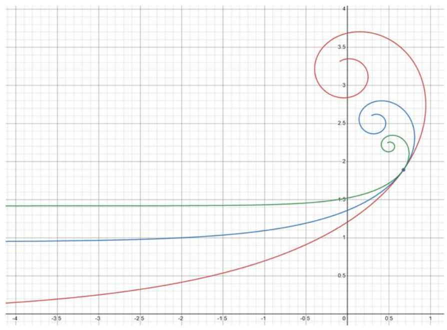
Das untersuchte SiCi-Kurvenlineal der Firma Faber-Castell (Originalmaße: 299 x 132 x 2 mm, Markteinführung 1961) besteht aus sieben verschieden skalierten Abschnitten von SiCi-Spiralen.



Im mittigen Aufdruck ist zu lesen: „relative Krümmungsänderung Δk_r = konstant“.

Angesichts des im Index von Δk verwendeten Buchstabens „r“ und der durch Teilstriche markierten Krümmungsradien (Maßzahlen in mm) ist m. M. eher von relativen „Krümmungsradiusänderungen“ zu sprechen, wiewohl die Krümmung bloß der Kehrwert des Krümmungsradius ist. In Einklang mit den im Schriftstück „KURVENLINEALE – Historisches, Geometrisches, Mathematisches“ (und auch an vielen anderen Stellen der Fachliteratur) verwendeten Symbolen/Buchstaben könnte man k (Krümmung) durch κ (kappa) und r (Krümmungsradius) durch ρ (rho) ersetzen somit statt Δk_r für die relative „Krümmungs(radius)änderungen“ $\Delta\kappa_\rho$ schreiben.



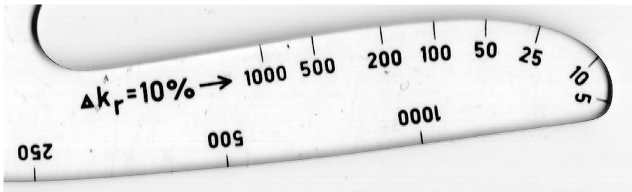


SiCi-Spiralen im Parameterbereich $0.01 \le u \le 10$ in den Skalierungen a = 10, 20 bzw. (≈)37.
Skalierungszentrum / Zentrum der Skalierung ist der Koordinatenursprung (0|0).

Zusammenhang zwischen der relative Krümmungs(radius)änderung (in p %) und dem Skalierungsfaktor a einer SiCi-Spirale:
p % = 5/100 → a = 1/(p/100) = 100/p =100/5 = 20
p % = 10/100 → a = 1/(p/100) = 100/p =100/10 = 10
p % = 2.7/100 → a = 1/(p/100) = 100/p =100/2.7 = 37.037037… ≈ 37
vergl. e = 2,71828… a = 100/e = 36.7879… ≈ 37

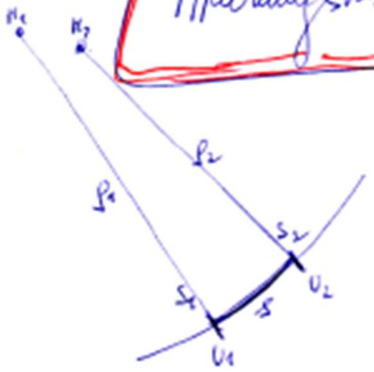
Genau genommen versteht man unter einer relativen Krümmungsradiusänderung (in Differenzenform) den Quotienten $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ bzw. (in differentieller Form) den Quotienten $\frac{d\rho}{\rho}$ – angegeben (z. B.) in Prozenten $p\% = \frac{p}{100}$. Fehlt noch eine Größe, worauf sich die relative Krümmungsradiusänderung bezieht.
Im Falle eines Abschnitts des SiCi-Kurvenlineals bezieht sie sich auf die Länge des (differentiell) kleinen Bogenstücks (ds bzw.) Δs zwischen jenen Punkten auf dem Bogen, für die die relative Krümmungsradiusänderung $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}$ berechnet wird – in der Praxis ein Stück mit der Länge ein mm.

Ausschnittvergrößerung des Abschnitts mit konstanter relativer Änderung des Krümmungsradius Δk_r = 10 % (bezogen auf ein (differentiell) kleines Bogenstück – in der Praxis je mm) in Richtung des eingezeichneten Pfeils. Die Krümmungsradien in mm sind durch Teilstriche markiert.



Wenn die relative Änderung des Krümmungsradius, bezogen auf ein (differentiell) kleines Bogenstück $(\frac{d\rho}{\rho})/ds = -\frac{p}{100}$ beträgt (das Minuszeichen berücksichtigt die sukzessive Abnahme des Krümmungsradius), so erhält man nach Integration dieser Differentialgleichung den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius ρ und der Bogenlänge s bzw. den zwischen der Bogenlänge s und dem für die SiCi-Parameterkurve verwendeten (Integrations-)Parameter u (siehe dort!)

Krümmungsverlauf in der Sili-Spirale



$$\frac{d\rho}{\rho} \Big/ ds = -\frac{p}{100} = (-p\%)$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{p}{100} \int_{s_1}^{s_2} ds$$

$$\ln \rho \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = -\frac{p}{100} \cdot s \Big|_{s_1}^{s_2}$$

$$\ln \rho_2 - \ln \rho_1 = -\frac{p}{100} \cdot (s_2 - s_1)$$

$$\rightarrow s_2 - s_1 = -\frac{100}{p} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

wegen $\varkappa = U/a = \frac{1}{\rho}$ $\quad \rho = \frac{a}{U}$

$$\rightarrow s_2 - s_1 = -\frac{100}{p} \cdot \ln \frac{a/U_2}{a/U_1} = -\frac{100}{p} \ln \frac{U_1}{U_2}$$

$$s_2 - s_1 = +\frac{100}{p} \cdot \ln \frac{U_2}{U_1}!$$

$$\ln(\rho_2/\rho_1) = -\frac{p}{100}(s_2 - s_1)$$

$$\rho_2/\rho_1 = e^{-\frac{p}{100}(s_2 - s_1)}$$

$$\boxed{\rho_2 = \rho_1 \cdot e^{-\frac{p}{100}(s_2 - s_1)}}$$

Vergl. Faber-Castell-Anleitung

$$\Delta k_r = \frac{100}{L} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\Delta k_r}{100} = \frac{1}{L} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{p}{100} = \frac{-1}{s_2 - s_1} \cdot \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = +\frac{1}{s} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

wegen: $\varkappa_1 = U_1/a = \frac{1}{\rho_1}$ $\quad \rho_1 = \frac{a}{U_1}$

über die Bogenlänge (s. dort) weiß man:

bei $U_1 = 1$ $\quad s_1 = 0!$

$$\rho_1 = \frac{a}{U_1} = \frac{a}{1} = a$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = a \cdot e^{-\frac{p}{100} \cdot s_2}$$

bzw. (Indexierung nicht (mehr) notwendig)

$$\boxed{\rho(s) = a \cdot e^{-\frac{p}{100} \cdot s}}$$

$$\boxed{\rho(s) = a \cdot e^{-\frac{1}{a} \cdot s}}$$

Der Krümmungsradius nimmt exponentiell ab.
Die Krümmung nimmt exponentiell zu.

Vergleicht man mit der Cesàro-Gleichung:

$$\varkappa = e^{s/a}/a \Rightarrow \underline{\rho} = \frac{1}{\varkappa} = a/e^{+s/a} = \underline{a \cdot e^{-s/a}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{p}{100}$$

$$\underline{a = \frac{100}{p}} \text{ (Skalierungsfaktor der Sili-Spirale)}$$

vergl.: $\frac{d\rho}{ds} = -\frac{1}{a} \cdot a \cdot e^{-s/a}$

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{1}{a} \cdot \rho(s)$$

$$\frac{d\rho}{\rho(s)} \Big/ ds = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{\frac{100}{p}} = -\frac{p}{100}$$

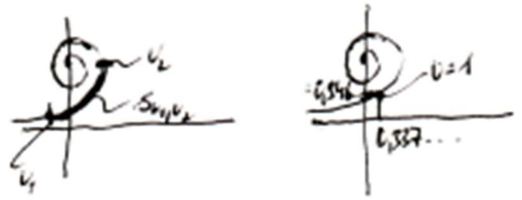
SiCi-Spirale: Cesàro-Gleichung, Skalierung

Bogenlänge $\left[s = a \cdot \ln(v)\right]$ $\Rightarrow$ $\frac{s}{a} = \ln(v)$ $\Rightarrow$ $e^{s/a} = v$
ausgehend vom „Start"-Punkt $v = 1$!

Krümmung $\left[\varkappa = \frac{v}{a}\right]$ $\longrightarrow$ $\boxed{\varkappa = \frac{e^{s/a}}{a}}$ Cesàro-Gleichung

1) NB: zur Bogenlänge

$s_{v_1,v_2} = a \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ Bogenlänge zwischen zwei Punkten auf der Kurve (Spirale), zu denen die Parameterwerte v_1 und v_2 gehören.



für $v_1 = 1$ und $v_2 = v$ $\Rightarrow$ $s = a \cdot \ln(v)$ bzw. $e^{s/a} = v$

Indizierung nicht mehr notwendig!

2) NB: $\varkappa = \frac{1}{\rho} = \frac{e^{s/a}}{a} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{a}{e^{s/a}} = a \cdot e^{-s/a}$ für $a = 1$ $\left[\rho = e^{-s}\right]$

[exponentielle Abnahme d. Krümmungsradius! bzw. $\varkappa = e^{s}$ exponentielle Zunahme der Krümmung!]

3) NB: $\rho(s) = a \cdot e^{-s/a}$

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = -\frac{1}{a} \cdot a \cdot e^{-s/a} = -\frac{1}{a} \cdot \rho(s)$$

$$\left[\frac{d\rho(s)}{\rho(s)} \bigg/ ds = -\frac{1}{a} = -\text{const.}\right]$$

Die relative Änderung des Krümmungsradius $\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)$, bezogen auf ein (differentiell) kleines Bogenstück (ds) – in der Praxis z.B. 1 mm – ist konstant. Das Minus-Zeichen vor der Konstanten (const.) berücksichtigt die Abnahme des Funktionswertes.

[NB 3-1) $f(x) = a^{b \cdot x}$

$\frac{df(x)}{dx} = b \cdot 1 \ln a \cdot a^{bx} = b \cdot \ln a \cdot f(x)$

$\frac{df(x)}{f(x)} \bigg/ dx = b \cdot \ln a = \text{constant}.$ Charakteristikum einer Exponentialfunktion!]