## Schnitt des 2Lapps entlang der z-Achse

Betreffend die durch einen Schnitt des 2Lapps entlang der
z-Achse (z-Achse liegt in der Schnittebene) erzeugte Schnittfläche:

N. b.: in der nachfolgenden (allgemein gehaltenen) Skizze & Rechnung) sollte, um den speziellen Bezeichnungen (in den anderen Ausführungen zum 2Lapp) **y durch z ersetzt** werden.

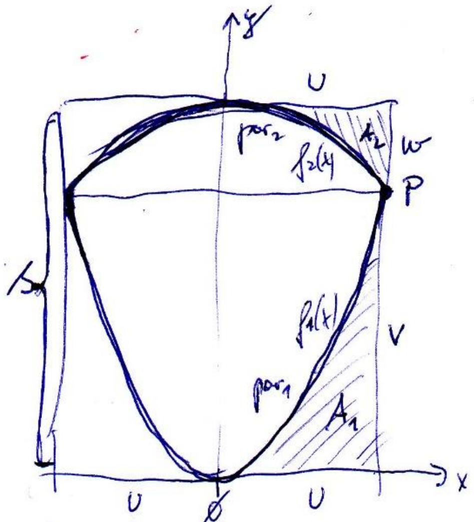
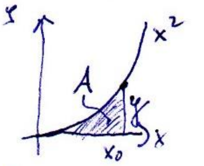



Abb. 1

$y = x^2$




$$A = \int_0^{x_0} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{x_0} = \frac{x_0^3}{3} = \frac{x_0 \cdot x_0^2}{3} = \frac{x_0 \cdot y}{3}$$

$$f_1(x) = a_1 x^2 = y$$

$$v = a_1 u^2 \Rightarrow a_1 = \frac{v}{u^2}$$

$$f_1(x) = y = \frac{v}{u^2} \cdot x^2$$

$$A_1 = \int_0^u \frac{v}{u^2} \cdot x^2 = \frac{v}{u^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^u = \frac{v \cdot u^{\cancel{3}}}{\cancel{u^2}\, 3} = \frac{v \cdot u}{3}$$

$$f_2(x) = a_2 x^2 = y \text{ (kopfstehend!)}$$

$$w = a_2 u^2 \Rightarrow a_2 = \frac{w}{u^2}$$

$$f_2(x) = y = \frac{w}{u^2} \cdot x^2$$

$$A_2 = \int_0^u \frac{w}{u^2} \cdot x^2 = \frac{w}{u^2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^u = \frac{w\, u^{\cancel{3}}}{\cancel{u^2}\, 3} = \frac{w \cdot u}{3}$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = \frac{v \cdot u}{3} + \frac{w \cdot u}{3} = \frac{u}{3}(v + w) = \frac{u \cdot s}{3}\,!$$

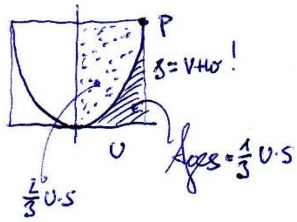
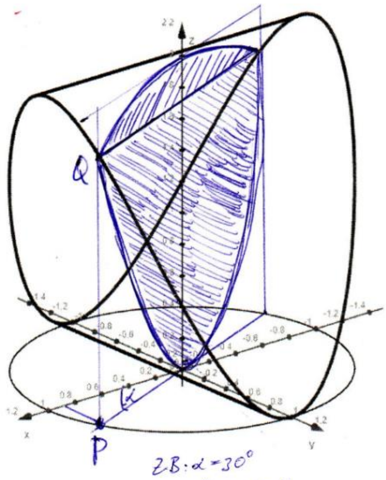



Abb. 2

Unabhängig davon, wo P auf der Seite (v + w =) s (bei konstantem u) liegt, die Fläche $A_{ges} = A_1 + A_2 = 1/3 \cdot u \cdot s$ bleibt gleich groß – auch wenn v = s oder w = s. In diesem Fall gibt es nicht zwei Flächenteile (Abb. 1) sondern nur eine(!) einzige Fläche (Abb. 2).
Die Ergänzungsfläche (das Flächenkomplement) auf das Rechteck mit der Fläche u · s, das halbe Parabelsegment in Abb. 2 (gepunktete Flächenfüllung), muss einen Inhalt von 2/3 · u · s haben.

https://stuzka.at/2Lapp/2Lapp_SolidWorks_Animation_Schnittflaeche.mp4

Wenn jede(**!**) in der eingangs erwähnten Art (Schnitt entlang der z-Achse) erzeugte 2Lapp-Schnittfläche gleich großen Flächeninhalt hat, dann kann man jene Schnittfläche, die nur aus einem(**!**) einzigen Parabelsegment (z. B. $z(x) = 2x^2$ mit [-1<=x<=+1] und somit [0<=z<=+2]) besteht (Abb. 3) für die Volumsberechnung des 2Lapps heranziehen.




z.B.: $\alpha = 30°$

$\sin(30°) = 1/2$

$\cos(30°) = \sqrt{3}/2$

$Q\left(\sqrt{3}/2 \,\middle|\, 1/2 \,\middle|\, 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}$

$1{,}5$ !

$P\left(\sqrt{3}/2 \,\middle|\, 1/2 \,\middle|\, 0\right)$

Man berechnet einfach das Volumen des $2x^2$-Drehparaboloids, bei dem alle Schnittflächen (z-Achse liegt in der Schnittebene) natürlich gleichen Inhalt haben, mit Hilfe eines Integrals (eines Rotationskörpers):

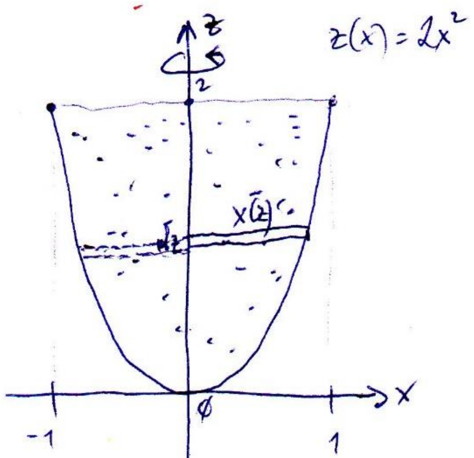



Abb. 3

$$z = 2x^2$$

$$\frac{z}{2} = x^2$$

$$f(z) = x = \sqrt{\frac{z}{2}}$$

$$f^2(z) = \frac{z}{2}$$

$$V = \int_{z=0}^{z=2} f(z)^2 \cdot \pi \, dz = \int_0^2 \pi \cdot \frac{z}{2} \, dz = \pi \left. \frac{z^2}{2\cdot 2} \right|_0^2 = \frac{4}{4} \cdot \pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Die raffinierte Lösung (Ausschnitte IBDG)

https://eplus.uni-salzburg.at/download/pdf/6202445
https://eplus.uni-salzburg.at/download/pdf/6216901

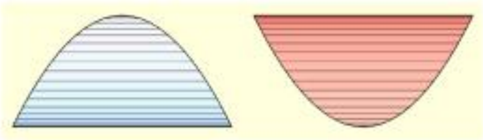
**Aufgabenecke 2/2020**

## Aufgabe 28.4 – knifflig

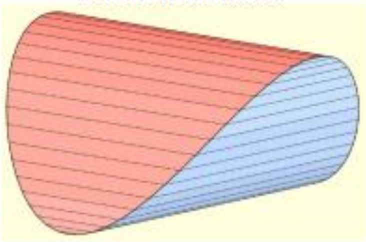
Das abgebildete Objekt entsteht als Durchschnitt zweier kongruenter parabolischer Zylinder:

$\Phi_1: z = y^2 - \frac{1}{2}$

$\Phi_2: z = -x^2 + \frac{1}{2}$



*Auf-und Kreuzriss*



*Axonometrische Darstellung*

Man bestimme das Volumen des Objekts.

## 28.4

Es gibt für die Lösung dieser Aufgabe verschiedene Ansätze. Die im Folgenden ausgeführten Überlegungen führen besonders einfach und schnell zur Lösung.

1. Man kann leicht zeigen, dass die Schnittkurve der beiden kongruenten parabolischen Zylinder auf einem erstprojizierenden Drehzylinder liegt:

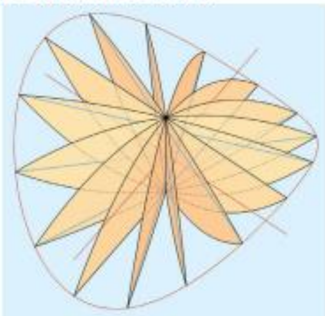
$\Phi_1: z = y^2 - \frac{1}{2}$

$\Phi_2: z = -x^2 + \frac{1}{2}$

Daraus folgt sofort:

$x^2+y^2=1$

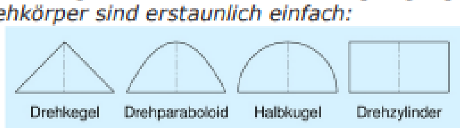
2. Schnitte durch die z-Achse:



Jeder Schnitt durch die z-Achse liefert zwei Parabelsegmente mit gemeinsamer Sehne $s=2r$, deren Höhen sich stets auf $H=1$ ergänzen. Man kann daher die Volumsformel für das Drehparaboloid anwenden:

$V = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot H \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$

*Anmerkung: Die Volumsformeln einiger gängiger Drehkörper sind erstaunlich einfach:*




$V = G \cdot \frac{H}{3}$ $\quad V = G \cdot \frac{H}{2}$ $\quad V = G \cdot \frac{2H}{3}$ $\quad V = G \cdot H$

*Zwei weitere Lösungsansätze sind zwar rechnerisch etwas aufwendiger, nichtsdestoweniger erwähnenswert. Die Auflösung der auftretenden bestimmten Integrale darf der geneigten Leserin/dem geneigten Leser überlassen bleiben, das Resultat ist ja bekannt.*

* Waagrechte ebene Schnitte nach Rechtecken:

$$V = 4 \cdot \int_{z=-\frac{1}{2}}^{z=\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - z} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + z}\, dz$$

* Ebene Schnitte in zweiter Hauptlage nach Parabelsegmenten:

$$V = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1 - x^2} \cdot (1 - x^2)\, dx$$